Практическое занятие № 7-9.

Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.

Вычисление длин фигур с помощью определенных интегралов.

Вычисление объемов фигур с помощью определенных интегралов.

Цель: научиться вычислять площади плоских фигур, длин фигур и объемы тел вращения с помощью определенного интеграла.

Материально техническое обеспечение:

1.методические рекомендации к выполнению работы

2.задание и инструкционная карта для проведения практического занятия

3.тетрадь для практических работ

4.карандаш, линейка, ручка

1.Краткие теоретические сведения

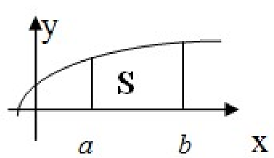
1.Площадь плоской фигуры

Если интегрируемая на отрезке [a;b] функция *f (x)* неотрицательна, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f (x), осью абсцисс и прямыми x = a и x = b

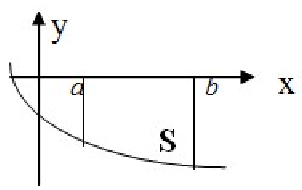
План вычисления площади криволинейной трапеции:

1. Схематический чертеж.
2. Представление искомой площади как суммы или разности площадей.
3. Записать каждую функцию в виде *y = f(x)*.
4. Вычислить площадь каждой криволинейной трапеции или площади искомой фигуры.

Площади фигур.

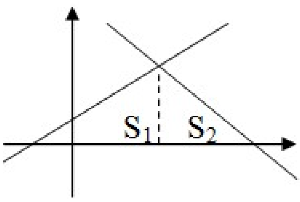


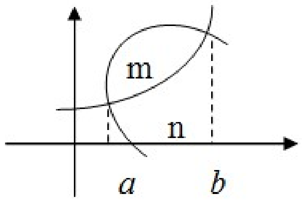
$$S=\int_a^b f(x)dx$$



$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

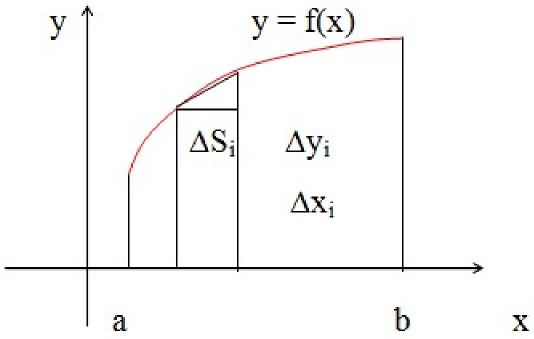
Если рассмотренная фигура не является криволинейной трапецией, тогда площадь нужно представить как сумму или разность криволинейных трапеций.





S = $S_1 + S_2$ S = $S_{amb} - S_{anb}$

Вычисление длины дуги кривой.



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать (см. Интегрируемая функция.), что

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции (см. Производная фунции, заданной параметрически.), получаем

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и x = φ(t), y = ψ(t) и z = Z(t), то

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[Z'(t)]^2}\,dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\varphi,\quad \rho=f(\varphi).$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y. $y=\sqrt{r^2-x^2}$

Найдем производную $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

Тогда $\dfrac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\dfrac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\cdot\arcsin\dfrac{x}{r}\Big|_0^r=r\dfrac{\pi}{2}$

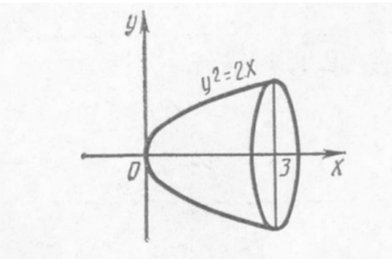
Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция ρ = f(φ) = r, $\rho'=\dfrac{df(\varphi)}{d\varphi}=0$ тогда

$$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{0+r^2}\,d\varphi=r\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi r$$

Объём тела вращения

Объём тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции *aABb*, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$ (где $a\le x\le b$), отрезком *ab* оси *Ox* и отрезками прямых *x=a* и *x= b* , вычисляется по формуле $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ (3)



Пример:

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной параболой $y^2=2x$, прямой $x=3$ и осью *Ox*.

Решение:

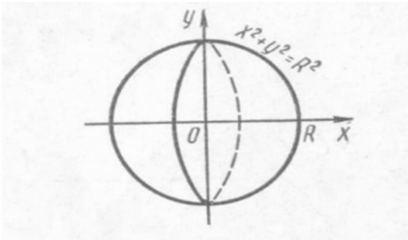
Применяя формулу (3), находим

$$V = \pi\int_0^3 2x\,dx = \pi x^2\Big|_0^3 = \pi(9-0) = 9\pi;\quad V = 9\pi \text{ куб.ед.}$$

Пример:

Вычислить объём шара радиуса R.

Решение:



Шар образован вращением вокруг оси Ox круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат и радиусом R.

Учитывая симметрию круга относительно оси ординат, сначала найдем по формуле (3) половину искомого объема:

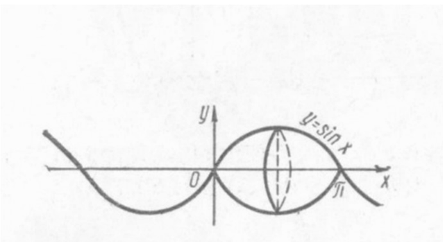
$$\frac{1}{2}V_ш = \pi\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi R^2\int_0^R dx - \pi\int_0^R x^2dx = \pi R^2 x\Big|_0^R - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_0^R =$$

$$= \pi R^2 x\Big|_0^R - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_0^R = \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3} = \frac{3\pi R^3 - \pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3};$$

$$\frac{1}{2}V_ш = \frac{2}{3}\pi R^3 \text{куб.ед.}$$

Следовательно, $V_ш = \dfrac{4}{3}\pi R^3$куб.ед.

Пример:



Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной осью Ox и полуволной синусоиды $y = \sin x\ (0 \le x \le \pi)$.

Решение:

Применяя формулу (3), находим

$$V=\pi\int_0^\pi \sin^2 x dx=\pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi dx-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos 2x dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}x\Big|_0^\pi-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x d(2x)=\frac{\pi}{2}x\Big|_0^\pi-\frac{\pi}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{2}\pi-\frac{\pi}{4}0=\frac{\pi^2}{2};$$

$$V=\frac{\pi^2}{2}\text{куб.ед.}$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции *aABb*, ограниченной непрерывной кривой $x=f(y)$ (где $a\le y\le b$), отрезком *ab* оси *Oy* и отрезками прямых $y=a$ и $y=b$, вычисляется по формуле $V=\pi\int_a^b f^2(y)dy$. (4)

Путь, пройденный точкой.

Если точка движется прямолинейно и ее скорость $\upsilon=f(t)$ есть известная функция времени *t,* то путь, пройденный точкой за промежуток времени $t_1\le t\le t_2$, вычисляется по формуле

$$s=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \qquad (5)$$

Пример:

Тело движется прямолинейно со скоростью $\upsilon=0{,}1t^3 \quad (\upsilon-\text{в м/с})$. Вычислить путь, пройденный телом за 10с.

Решение:

Применяя формулу (5), находим

$$s=\int_0^{10} 0{,}1t^3 dt=\frac{1}{10}\frac{t^4}{4}\Big|_0^{10}=\frac{1}{40}\cdot 10^4=250\,(\text{м})$$

Пример:

Скорость прямолинейно движущегося тела равна $\upsilon=(4t-t^2)\quad(\upsilon-\text{в м/с})$. Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение:

В момент остановки скорость движения тела равна нулю, т.е.

$4t-t^2=0,\ t(4-t)=0,\ t_1=0,\ t_2=4.$

Итак, тело остановится через 4 с.

Путь, пройденный телом за это время, вычисляем по формуле (5).

$$s=\int_0^4\left(4t-t^2\right)dt=4\int_0^4 tdt-\int_0^4 t^2dt=4\frac{t^2}{2}\Big|_0^4-\frac{t^3}{3}\Big|_0^4=$$

$$=2\cdot 16-\frac{1}{3}\cdot 64=32-21\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}$$

Работа силы.

Если переменная сила *F=F(x)* действует в направлении оси *Ox*, то работа силы на отрезке $a\le x\le b$ вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b F(x)dx \qquad (6)$$

Пример:

Вычислить работу, которую нужно совершить при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 1см требуется сила 10 Н.

Решение:

Согласно закону Гука, сила *F*, растягивающая или сжимающая пружину на *x* метров, равна *F = kx*, где *k* – коэффициент пропорциональности.

Из условия следует *10 = k· 0,01*, т.е. *k = 1000*, и, следовательно, *F = kx* = 1000 *x*.

Искомую работу находим по формуле (6):

$$A=\int_0^{0,08}1000xdx=1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,08}=1000\frac{0,0064}{2}=3,2\ (\text{Дж})$$

Пример:

Сила 196,2 Н растягивает пружину на 18 см. Какую работу она производит?

Решение:

По закону Гука, *F=kx*, откуда *k= F/x*=196,2/0,18=1090 (Н/м). Значит, *F* = 1090 *x*. Находим искомую работу:

$$A=\int_0^{0,18}1090xdx=\frac{1090}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,18}=545\cdot 0,0324\approx 17,7\ (\text{Дж})$$

Пример:

Для сжатия пружины на 3 см необходимо совершить работу в 16 Дж. На какую длину можно сжать пружину, совершив работу в 144 Дж?

Решение:

По закону Гука, $F = kx$; тогда $A_1 = \int_0^{0,03} kxdx = \frac{kx^2}{2}\Big|_0^{0,03} = \frac{0,0009k}{2}$

Т. к A_1=16 Дж, то $\frac{0,0009k}{2}$=16, откуда k =$\frac{32}{0,0009} = \frac{320000}{9}\left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$

Значит, F=(320000/9)x.

Далее, имеем $A_2 = \int_0^a \frac{320000}{9} xdx = \frac{320000}{9}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{160000}{9}a^2$

Но A_2=144 Дж, то есть $\frac{160000}{9}a^2$=144, $a^2 = \frac{9 \cdot 144}{160000}, a^2 = 0,0081, a = 0,09$

Итак, пружину можно сжать на 9 см.

Сила давления жидкости

Сила давления p жидкости плотности ρ на вертикальную пластинку, погруженную в жидкость, вычисляется по формуле:

$$P = \rho g \int_a^b Sdx, \qquad (7)$$

где $g = 9,81$ *м/с*^{2} – ускорение свободного падения, S – площадь пластинки, а глубина погружения пластинки изменяется от *а до b.*

Пример:

Вычислить силу давления воды на одну из стенок аквариума, имеющего длину 30 см и высоту 20 см.

Решение:

Стенка аквариума имеет форму прямоугольника, поэтому $S = 0,3\,x$, где $0 \le x \le 0,2$. Плотность воды равна 1000 кг/м^3. Тогда сила давления воды на стенку аквариума согласно формуле (7) составляет

$$P = 1000 \cdot 9,8 \int_0^{0,2} 0,3xdx = 9810 \cdot 0,3 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,2} = 9810 \cdot 0,3 \cdot 0,02 = 58,86\,(\text{Н})$$

2. Примеры выполнения заданий:

<u>Задание</u>

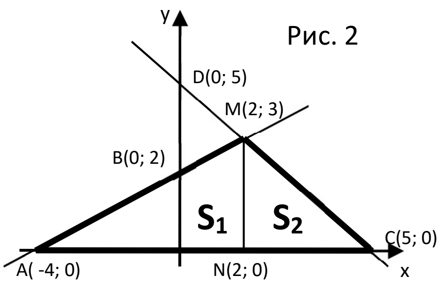
Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x - 2y + 4 = 0,\ y = 0$ и $x + y - 5 = 0.$

Решение**.** Выполним построение фигуры.

Построим прямую $x - 2y + 4 = 0$: $y = 0, x = -4,$ A(-4; 0); $x = 0, y = 2,$ B(0; 2). Построим прямую $x + y - 5 = 0$: $y = 0, x = 5,$ C(5; 0); $x = 0, y = 5,$ D(0; 5).

Найдем точку пересечения прямых, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ x+y-5=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-4, \\ 2y-4+y-5=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-4, \\ 3y=9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-4, \\ y=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases} \Rightarrow M(2;3)$$



Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC, так как при изменении x от A до N площадь ограничена прямой $x - 2y + 4 = 0$, а при изменении x от N до C – прямой $x + y – 5 = 0$.

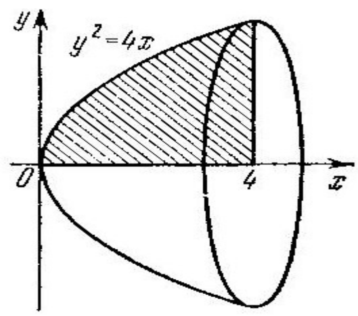
Для треугольника AMN имеем: $x - 2y + 4 = 0$; $y = 0,5x + 2$, т.е. $f(x) = 0,5x + 2$, $a = -4$, $b = 2$. Для треугольника NMC имеем: $x + y – 5 = 0$, $y = 5 – x$, т.е. $f(x) = 5 – x$, $a = 2$, $b = 5$.

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-4}^{2}(0,5x+2)dx + \int_{2}^{5}(5-x)dx = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-4}^{2} + \left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2}^{5} = \left(\left(\frac{2^2}{4}+2\cdot2\right)-\left(\frac{(-4)^2}{4}+2\cdot(-4)\right)\right)+$$

$$+\left(\left(5\cdot5-\frac{5^2}{2}\right)-\left(5\cdot2-\frac{2^2}{2}\right)\right) = (1+4-4+8)+(25-12,5-10+2) = 9+4,5 = 13,5$$

Ответ. S = 13, 5 кв. ед.

Пример Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 4.$



Решение:

Применив формулу $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$, получим

$$V = \pi\int_0^4 4xdx = 4\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 2\pi\left(4^2-0^2\right) = 32\pi(куб.ед.)$$

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy=1$, осью Ox и прямыми $x=1$ и $x=e$ (Рис. 2)

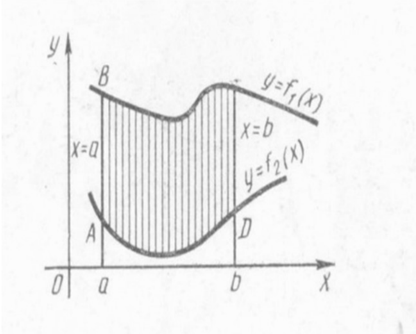
Решение:

Применяя формулу (1), получаем

$$I = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1; \quad S = 1 \text{кв. ед.}$$

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, прямыми $x = – 1$, $x = 2$ и осью абсцисс (Рис. 4)



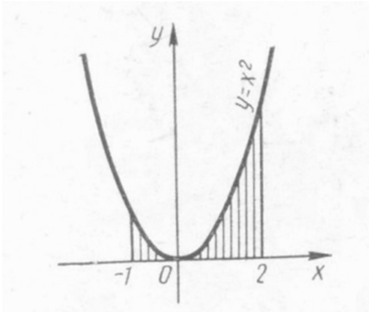


Рис. 3 **Рис. 4**

Решение:

Применяя формулу (1), получаем

$$I = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(8-(-1)) = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3; \; S = 3 \text{ кв. ед.}$$

Площадь фигуры ABCD, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (где $a \le x \le b$) и отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$S = |I|, \text{ где } I = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx \qquad (2)$$

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 6x - x^2 - 5$ и осью Ox (Рис. 5)

Решение:

Найдем пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения графиков функций $y=6x-x^2-5$ и $y=0$ (ось Ox). Для этого решим систему

$\begin{cases} y = 6x - x^2 - 5 \\ y = 0 \end{cases}$ Имеем $6x - x^2 - 5 = 0$, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2; x_1 = 1, x_2 = 5$

Теперь найдем искомую площадь по формуле (1):

$$I = \int_1^5 (6x - x^2 - 5)dx = 6\int_1^5 x\,dx - \int_1^5 x^2 dx - 5\int_1^5 dx = 6\frac{x^2}{2}\Big|_1^5 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 - 5x\Big|_1^5 =$$

$$= 3(25-1) - \frac{1}{3}(125-1) - \frac{1}{3}(125-1) - 5(5-1) = 3\cdot 24 - \frac{1}{3}124 - 5\cdot 4 =$$

$$= 72 - 41\frac{1}{4} - 20 = 10\frac{2}{3}; \quad S = 10\frac{2}{3} \text{ кв.ед.}$$

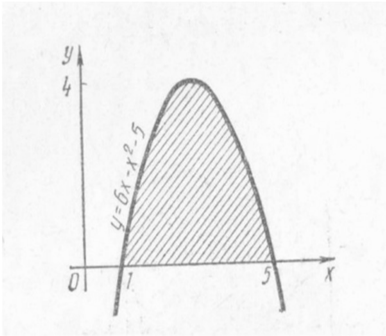


Рис. 5

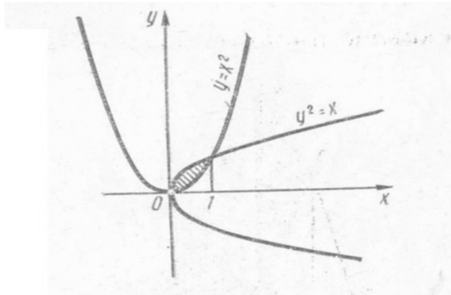


Рис. 6

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y^2=x$ (Рис. 6)

Решение:

Найдем пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения графиков функций $y=x^2$ и $y^2=x$. Для этого решим систему $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$

Имеем $(x^2)^2=x,\ x^4 - x = 0,\ x(x^3 - 1)=0,\ x_1= 0,\ x_2=1$

Искомую площадь вычисляем по формуле (2) при

$$f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=\sqrt{x}:$$

$$I=\int_0^1\left(x^2-\sqrt{x}\right)dx=\int_0^1 x^2dx-\int_0^1 x^{1/2}dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}(1-0)-\frac{2}{3}(1-0)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3},\quad S=|I|=\frac{1}{3}\text{кв.ед.}$$

Пример:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=4-x^2$ и $y = x^2 - 2x$ (Рис. 7)

Решение:

Найдем пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения графиков функций $y=4-x^2$ и $y=x^2-2x$. Для этого решим систему $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

Имеем $4 - x^2=x^2 - 2x,\ 2x^2 - 2x - 4=0,\ x^2 - x - 2=0,$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2},\ x_1=-1,\ x_2=2$$

Искомую площадь вычисляем по формуле (2):

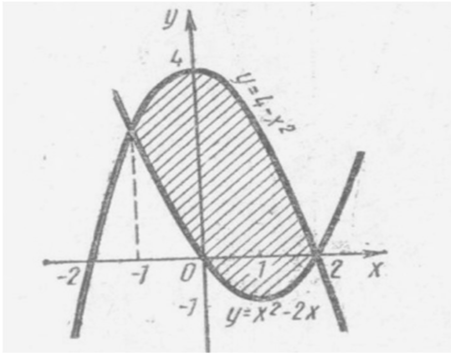


Рис. 7

$$I=\int_{-1}^{2}\left(4-x^2-x^2+2x\right)dx=\int_{1}^{2}\left(4-2x^2+2x\right)dx=4\int_{-1}^{2}dx-2\int_{-1}^{2}x^2dx+2\int_{-1}^{2}x\,dx=$$

$$=4x\Big|_{-1}^{2}-2\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}+2\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}=4(2+1)-\frac{2}{3}(8+1)+4-1=12-6+3=9;$$

$S=9$ кв.ед.

Задания для выполнения

1 вариант.

№1 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y=x^2-2,\ y=1-2x$

2) $y=x^3,\quad y=8,\quad x=0$

№2 Фигура, ограниченная прямыми y = - x + 3, x = 0, x = 3, y = 0 вращается вокруг оси Ох. Найти объём полученного тела вращения.

№3 Плоская фигура ограничена графиком параболы $f(x)=2x+x^2$. Вычислить объем тела вращения

2 вариант.

№1 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y=3x^2+1,\quad y=3x+6$

2) $y=x^2,\ y=x+1$

№2 Фигура, ограниченная кривой y = $\frac{1}{x}$ и прямыми x = 2, x = 3 . Найти объём тела, полученного при вращении кривой вокруг оси Ох.

№3 . Плоская фигура ограничена графиком параболы $f(x)=x-x^2$.Вычислить объем тела вращения.

3. Порядок выполнения

- ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме;
- изучить схему решения задач;
- выполнить задания практической работы;
- сформулировать вывод

4.Содержание отчета: отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте основные свойства определённого интеграла.
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Запишите формулу интегрирования по частям для определённого интеграла.
4. Запишите формулы для вычисления площадей плоских фигур.
5. Запишите формулы для вычисления объёмов тел вращения.
6. Запишите формулу для вычисления работы переменной силы.
7. Запишите формулу для вычисления пути прямолинейного движения.