Министерство образования Ставропольского края
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«МИНЕРАЛОВОДСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА»

Тема: Таблица производных. Типовые задачи

В мире бесконечное множество функций. Среди этого множества есть функции, которые наиболее важны для практического применения. Эти функции заложены во всех законах природы. Из этих функций, как из кирпичиков, можно сконструировать все остальные. Этот класс функций называется элементарные функции. На данном занятии мы рассмотрим производные некоторых элементарных функций, докажем несколько формул производной и решим типовые задачи с помощью этих формул.

Таблица производных

Дифференцирование функций «с нуля», т. е. исходя из определения производной и теории пределов – вещи достаточно трудоёмкая. Поэтому математики вычислили производные элементарных функций. Получилась таблица производных, где всё уже готово.

Производные некоторых элементарных функций:

Таблица производных

$$C' = 0$$
$$x' = 1$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = \sin x$$
$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2};$$
$$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Производная сложной функции

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).}$$

Доказательство формулы $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Дано: $f(x) = \sqrt{x}; x > 0$

Доказать: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Доказательство

Изобразим график функции: $f(x) = \sqrt{x}$ (см. Рис. 1). Зафиксируем точку x_0 и приращение аргумента Δx. Получаем новое значение аргумента $x_0 + \Delta x$ и, соответственно, новое значение функции $f(x_0 + \Delta x)$. То есть при переходе от значения аргумента x_0 к $x_0 + \Delta x$ значения функции изменяются соответственно от $f(x_0)$ до $f(x_0 + \Delta x)$. Значение функции в новой точке равно $f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x}$.

Получили прямоугольный треугольник (выделен красным цветом), катетами которого являются два приращения – приращение аргумента (Δx) и приращение функции (Δf– разность между значением функции в новой точке и значением функции в старой точке).

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$$

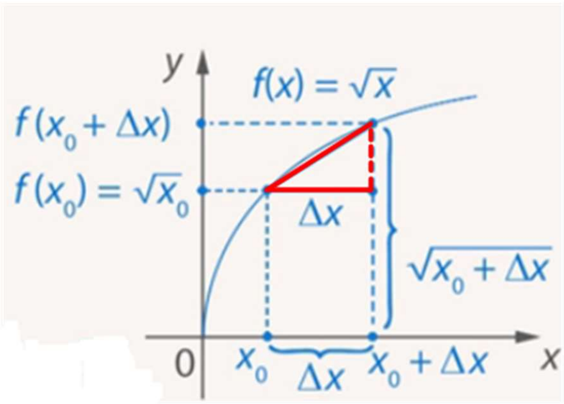

Рис. 1. Иллюстрация к доказательству

Найдём отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}$$

В числителе получили выражение разности квадратов:

$$\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right) = \left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2 = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x$$

Следовательно:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

Проанализируем данное выражение при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

x_0 – произвольное допустимое число, поэтому:

$f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Что и требовалось доказать.

Задача 1

Дано: $f(x) = \sqrt{x}$

Найти: $f'(4)$

Решение

1. Найдём производную в любой точке x:

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Найдём производную в заданной точке:

$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Как известно, это значение является тангенсом угла наклона касательной к кривой $y = \sqrt{x}$, проведённой в точке с абсциссой 4 (см. Рис. 2):

$f'(4) = \frac{1}{4} = \operatorname{tg}\alpha$

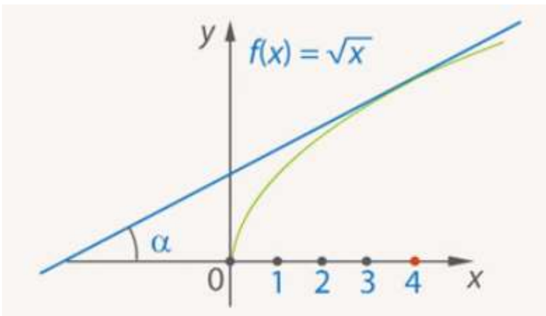

Рис. 2. Иллюстрация к задаче

Ответ: $f'(4) = \frac{1}{4}$

Доказательство формулы (sinx)'=cosx

Дано: $y = sinx$

Доказать: $(sinx)' = cosx$

Доказательство

На рисунке 3 показано, каким образом ведёт себя функция $y = \sin x$. Зафиксируем точку x и приращение аргумента Δx. Получаем новое значение аргумента (новую точку) $x + \Delta x$. При переходе от значения аргумента x к $x + \Delta x$ значения функции изменяются соответственно от $y = \sin x$ до $y = \sin(x + \Delta x)$.

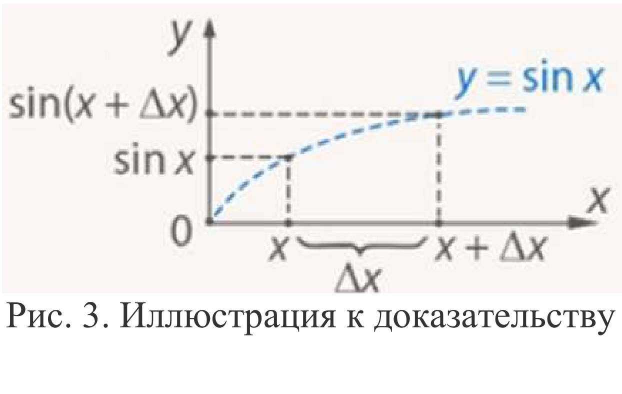

Рис. 3. Иллюстрация к доказательству

Найдём отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Для упрощения этого выражения используем формулу разности синусов:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x} =$$

$$\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

При $\Delta x \to 0$:

$$\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$$

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$$

Объясним это, рассмотрев тригонометрический круг с радиусом 1 и угол, равный $\frac{\Delta x}{2}$ (см. Рис. 4). Нам необходимо найти длину дуги $\overset{\frown}{MAN}$ и длину хорды MN.

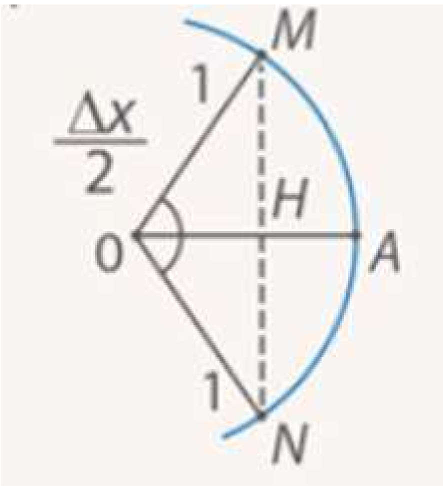

Рис. 4. Иллюстрация к доказательству

Длина дуги равна произведению радиуса на центральный угол:

$$l_\alpha = R \cdot \alpha$$

Радиус равен 1, поэтому длина дуги численно равна центральному углу, который равен Δx. Следовательно:

$$\overset{\frown}{MAN} = \Delta x$$

Хорда MN состоит из двух катетов треугольников NOH и MOH, которые равны произведению гипотенузы (единица, так как это радиус) на синус противолежащего угла. Следовательно:

$$MN = 2 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

При $\Delta x \to 0$ длина дуги стремится к длине хорды:
$\widetilde{MAN} \to MN$

То есть при маленьком угле дуга и хорда по длине неразличимы.

Таким образом, домножив выражение $\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ на 2, получаем выражение $\frac{2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}}$, которое есть отношение длины хорды к длине дуги:

$$\frac{2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \frac{MN}{\widetilde{MAN}}$$

Но так как $\widetilde{MAN} \to MN$, то:

$$\frac{2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$$

Следовательно, при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1 \cdot \cos x$$

Поэтому:

$$(sinx)' = cosx$$

Что и требовалось доказать.

Задача 2

Дано: $f(x) = \sin x$

Найти: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Решение

1. Найдём производную в любой точке *x*:

$$f'(x) = (sinx)' = cosx$$

2. Найдём производную в заданной точке:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача 3

Дано: $f(x) = \sin x$

Найти: тангенс угла наклона касательной к кривой $f(x) = \sin x$ в точках: а) $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $x_0 = 0$; в) $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Решение

На рисунке 5 показана иллюстрация к задаче. Изображена синусоида, к точке кривой с абсциссой $\frac{\pi}{4}$ проведена касательная, которая образует угол α с осью x. Тангенс данного угла необходимо найти. Также необходимо найти тангенс угла, который образовывается при пересечении оси абсцисс с касательной, проведённой к точке кривой с абсциссой 0 и $\frac{\pi}{2}$.

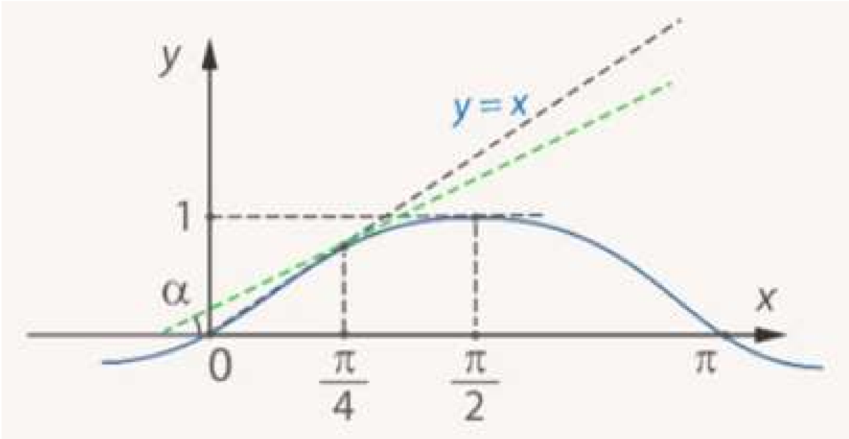

Рис. 5. Иллюстрация к задаче

Так как $f'(x) = tg\alpha$, то:
$f'(x) = (sinx)' = tga$

а) Для точки $x_0 = \frac{\pi}{4}$ тангенс угла наклона касательной будет равен:

$$tg\alpha = \left(sin\frac{\pi}{4}\right)' = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

б) Для точки $x_0 = 0$ тангенс угла наклона касательной будет равен:
$\operatorname{tg}\alpha = \cos 0 = 1$

Следовательно, прямая $y = x$, изображённая на рисунке 5, является касательной к синусоиде в точке 0.

в) Для точки $x_0 = \frac{\pi}{2}$, тангенс угла наклона касательной будет равен:
$\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Следовательно, в этом случае касательная параллельна оси x.

Ответ: а) $tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $tg\alpha = 1$; в) $tg\alpha = 0$.

Задания для самостоятельного решения

1. Доказать формулу производной $(cosx)' = -sinx$.
2. Доказать формулу производной $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
3. Найти производную функции $y = 2cosx$.