Министерство образования Ставропольского края
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«МИНЕРАЛОВОДСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА»

Тема: Примеры вычисления основных производных. Типовые задачи

На занятии мы вспомним, что такое производная функции, разберемся, как вычислять производные некоторых функций, вспомним геометрический и физический смысл производной.

Определение производной функции

Производная функции $f(x)$ в точке x_0:

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Геометрический смысл производной

Если задан график функции $f(x)$, то производная в точке x_0 – это тангенс угла наклона касательной к данной функции в точке с абсциссой x_0 (или угловой коэффициент касательной).

Физический смысл производной

Если в качестве функции мы берем перемещение, зависящее от t, – $s(t)$, то

$s'(t) = v(t)$,

где s – перемещение, t – время, а v – мгновенная скорость в данной точке.

И сегодня мы попробуем вычислить некоторые производные по определению.

Производная функции

Начнем с самого простого – с линейной функции.

Пусть $f(x) = kx + b$, где k и b – некоторые числа, а x – переменная.

Тогда:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(x_0+\Delta x)+b-(kx_0+b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kx_0+k\Delta x+b-kx_0-b}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k$$

Итак, выясняется, что $f'(x_0) = k$ для любого x_0. Значит, можно утверждать, что $(kx + b)' = k$.

О чем это говорит?

Во-первых, мы подтвердили несколько фактов про линейную функцию, которые нам, возможно, уже были известны.

1. Так, исходя из геометрического смысла производной, *тангенс угла наклона прямой совпадает с ее угловым коэффициентом (он равен производной в соответствующей точке).*

Кроме этого, мы видим, что раз производная постоянна, то угол наклона постоянен, это вполне соответствует нашим представлениям о прямой.

2. Если предположить, что материальная точка движется прямолинейно равномерно, то ее координата в данный момент времени описывается функцией: $x(t) = x_0 + vt$, где x_0 – начальная координата, а v – скорость. Рассмотрим это утверждение.

Предположим, что есть некоторая материальная точка, которая двигается по закону $x(t) = x_0 + vt$. Найти его производную.

Решение

Для удобства предположим, что точка движется равномерно, то есть v в каждой точке одинаково. Тогда с точки зрения физического смысла мы получим:

$x'(t_0) = v$.

Физический смысл производной: производная от координаты равна мгновенной скорости точки в данный момент времени.

Но для равномерного движения мгновенная скорость в любой момент времени одна и та же и равна скорости движения тела v. Получаем, что должно выполняться равенство: $x'(t) = v$.

Следствия производной линейной функции

Во-первых, $(x)' = 1$. Это следует из наших выкладок просто в силу того, что мы подставили $k = 1;\ b = 0$.

Далее, $(c)' = 0$. Итак, производная от константы равна нулю.

Производная функции

Дальше рассмотрим производную функции $f(x) = x^2$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

В силу того что x_0 – произвольна, имеем: $(x^2)' = 2x$

Где это может нам пригодиться? В дальнейшем с помощью производных мы будем исследовать свойства функций, говорить об их монотонности и т. д. Пока же мы можем говорить лишь о физическом и геометрическом смыслах. Разберем по примеру на каждый из них.

Пример 1

Тело движется по закону $x(t) = t^2$ (t – в секундах, x – в метрах). Какой будет скорость тела через 3 секунды после начала движения? Через какое время после начала движения скорость тела будет равна $10\frac{\text{м}}{\text{с}}$?

Дано: $x(t) = t^2, \vartheta(t_0) = 10\frac{\text{м}}{\text{с}}$

Найти:

1. $\vartheta(3) =?$
2. $t_0 =?$

Прежде всего вспомним, что $v(t) = x'(t) = 2t$.

Отсюда мы можем вывести, что скорость через три секунды, то есть при *t=3*, будет равна $6\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

$$v(3) = 3 \cdot 2 = 6\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

А $10\frac{\text{м}}{\text{с}}$ скорость будет равна через 5 секунд (*t=5*).

$$v(t_0) = 10$$

$$2t_0 = 10$$

$$t_0 = \frac{10}{2} = 5 \text{ с}$$

Ответ: $6\frac{\text{м}}{\text{с}}$, 5с.

В качестве небольшого упражнения попробуйте сами вывести производную функции $f(x) = ax^2 + bx + c$.

А сделав это, вы сможете решать физические задачи на равноускоренное движение. $s(t) = s_0 + vt + \frac{a_0 t^2}{2}$, где a_0 – ускорение.

Пример 2

В какой точке графика $y = x^2$ его касательная параллельна прямой $y = x - 2$?

Дано: $y = x^2, y = x - 2$.

Решение

Раз прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны, то есть угловой коэффициент касательной (он же тангенс угла наклона) должен быть равен 1. Но мы помним, что тангенс угла наклона касательной как раз равен производной в точке касания (в абсциссе точки касания) (см. рис. 1).

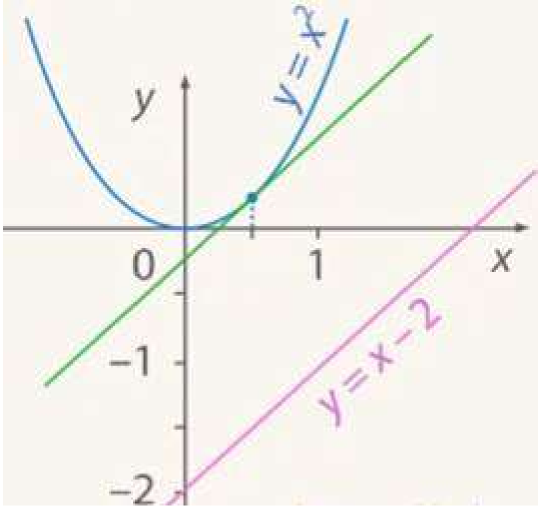

Рис. 1. Иллюстрация к примеру 1

$(x^2)' = 2x$

Приравнивая $2x_0 = 1$, имеем $x_0 = \frac{1}{2}$, значит, речь идет о касательной в точке $\frac{1}{2}$.

Ответ: в точке $\frac{1}{2}$.

Пример 3

Теперь рассмотрим кубическую функцию $f(x) = x^3$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 3x_0^2$$

В силу того, что x_0 произволен, имеем:

$(x^3)' = 3x^2$.

Итоги

На этом занятии мы с вами применяли определение производной на конкретных примерах. Мы вычислили производную линейной функции, производную x^2 и x^3, а также пока без доказательства познакомились с производной от x^n. Кроме этого, мы разобрали несколько примеров, увидели, где применяется производная.

Задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить производную функции $f(x) = 5x^2 + 3x + 4$.

2. Вычислить производную функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ в точке $x = 5$.

3. Найти производную функции $f(x) = 5 - 7x$.