Министерство образования Ставропольского края
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«МИНЕРАЛОВОДСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА»

Тема: Определение производной, её физический и геометрический смысл. Алгоритм нахождения производной

На занятии изучается тема «Определение производной, её физический и геометрический смысл. Алгоритм нахождения производной». На этом занятии вы узнаете, что представляет собой производная и какое место она занимает в геометрии и физике. На примерах разбирается алгоритм нахождения производной.

1. Введение новых понятий

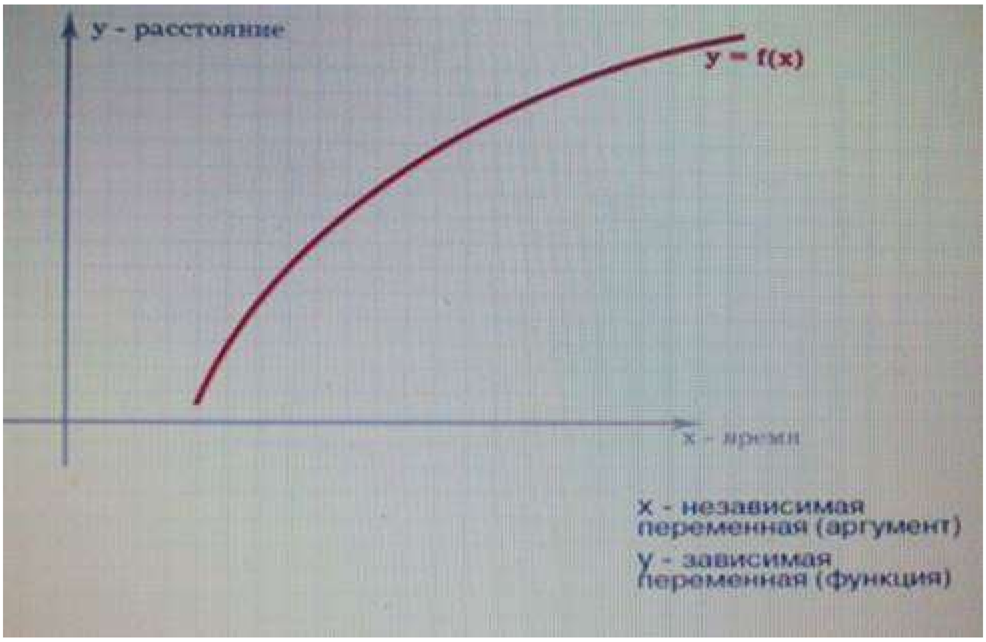

Рис. 1. График функции $y = f(x)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, ее график и дадим физическую интерпретацию.

Построим систему координат и кривую $y = f(x)$ (см. рис.1), где

x - независимая переменная или аргумент (время),

y – зависимая переменная или функция (расстояние),

f – закон или правило, по которому каждому значению x ставится в соответствие только одно значение y.

Зафиксируем момент времени x_0 (см. рис.2). В этот момент времени можно вычислить по заданному закону $f(x_0)$, т.е. имеем точку $A(x_0; f(x_0))$. Эта точка показывает, что в данный момент времени x_0, расстояние - $f(x_0)$. Дадим аргументу приращение Δx, т.е. прошло некоторое время Δx. Момент времени, который будет рассматриваться - это $x_0 + \Delta x$.

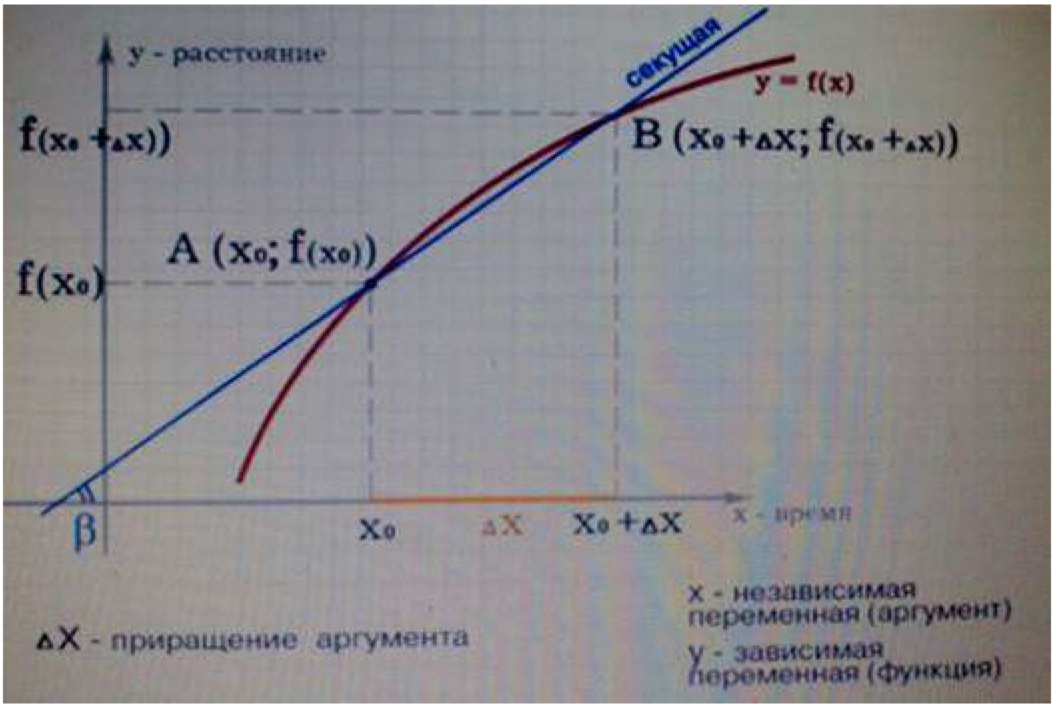

Рис. 2. Секущая к графику функции $y = f(x)$.

Δx – приращение аргумента – это разность между новым значением аргумента и старым.

Итак, в новый момент времени, расстояние (от дома) - $f(x_0 + \Delta x)$. Это расстояние можно вычислить по заданному закону, т.е. если подставить в функцию новое значение независимой переменной (аргумента), то можно вычислить новое значение функции.

Так получилась точка $B\big((x_0 + \Delta x);\ f(x_0 + \Delta x)\big)$. В результате получилась секущая AB, которая наклонена к оси x под углом β.

AB – секущая, β – ее угол наклона. Этот угол, во – первых, в верхней полуплоскости и, во – вторых, с положительным направлением оси x.

Рассмотрим треугольник ΔABC (см. рис.3). Он прямоугольный. В этом треугольнике острый угол – это угол β - угол наклона секущей. Один из катетов - это приращение аргумента, а второй катет – это разность между значением функции в новой точке и значением функции в старой точке.

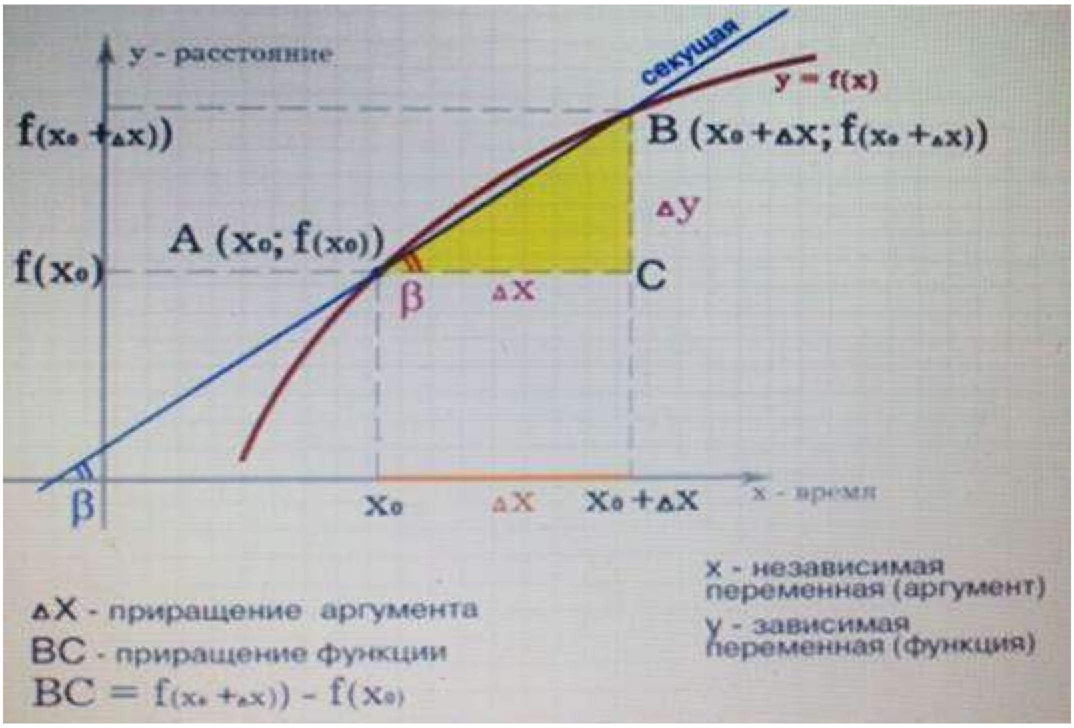

Рис. 3. Приращение функции и приращение аргумента.

Величина BC называется Δy – приращение функции и вычисляется как разность значений функции в новый момент времени минус значение функции в старый момент времени

$$BC = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y = \Delta f.$$

2. Физический смысл отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, где Δf – приращение функции, Δx – приращение аргумента (см. рис.4).

Из физических соображений ясно, что отношение расстояния ко времени – это средняя скорость $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \vartheta_{\text{ср}}$. В этом заключается физический смысл отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

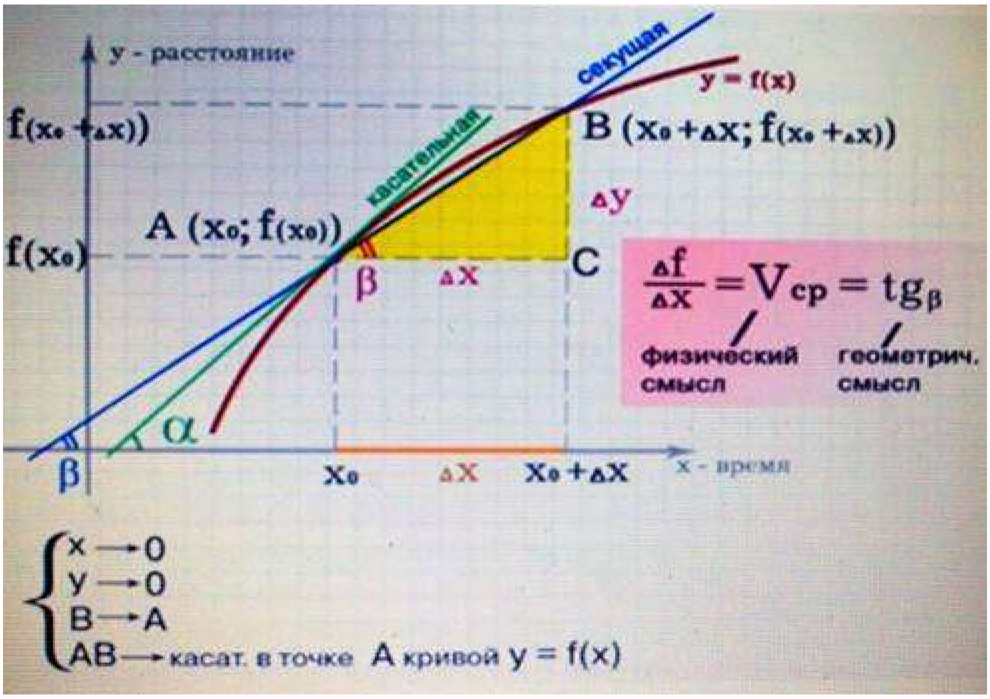

Рис. 4. Физический и геометрический смысл отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

С другой стороны отношение катета BC к катету AC – это тангенс угла β – тангенс угла наклона секущей, т.е. геометрический смысл отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ – это тангенс угла наклона секущей $\frac{\Delta f}{\Delta x} = tg\beta$.

3. Определение производной

Пусть $\Delta x \to 0$. Понятно, что и $\Delta y \to 0$. Точка B будет стремиться к точке A, а положение секущей AB будет стремиться занять положение касательной в точке A к кривой $y = f(x)$ (см. рис.4). Имеем

$$\begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ B \to A \\ \text{секущая } AB \to \text{к касательной в точке } A \text{ к кривой } y = f(x) \end{cases}$$

Зафиксируем эту касательную, α – угол наклона этой касательной. Если зафиксировать точку x_0, то отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ зависит только от величины Δx.

Если отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к какому-то числу, то это число называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное соотношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Определение производной с помощью пределов.

Предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если он существует, называется производной функции в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

4. Геометрический и физический смысл производной

$f'^{(x_0)} = \vartheta_{\text{мн}}(x)$, где $\vartheta_{\text{мн}}(x)$ – мгновенная скорость в момент x_0. В этом заключается физический смысл производной. Производная – это также тангенс угла наклона касательной $f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

5. Алгоритм нахождения производной

Для того чтобы найти $f'(x_0)$ нужно:

1) Задать приращение Δx– это приращение аргумента и вычислить соответствующее приращение функции Δy или $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

2) Найти разностное соотношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, упростить его и сократить на Δx.

3) Если отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к какому-то числу, то это число будет $f'(x_0)$.

6. Итог

Итак, на занятии было рассмотрено понятие производной. Для этого ввели два новых понятия: приращение аргумента и приращение функции. Также были рассмотрены события, когда приращение аргумента и приращение функции конкретные числа, тогда соотношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ имеет смысл физический – это средняя скорость за время Δx и геометрический смысл – это тангенс угла наклона секущей. Далее было рассмотрено, какие процессы происходят, когда $\Delta x \to 0$. Если $\Delta x \to 0$, тогда и $\Delta y \to 0$, и секущая стремится занять положение касательной. Если разностное отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к некоторому числу, то это число называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 . Физический смысл производной в момент x_0 – это мгновенная скорость в момент x_0 , а геометрический – это тангенс угла наклона касательной, которая проведена к кривой в точке с абсциссой x_0 . Рассмотрен алгоритм нахождения производной: нужно дать приращение аргументу и получить новую точку $x_0 + \Delta x$. Получили значение функции в новой точке и нашли приращение функции. Надо разделить Δf на Δx и упростить это отношение так, чтобы сократился Δx, и то, что получится при стремлении Δx к нулю будет называться производной функции в конкретной точке x_0 . Дальнейшее изложение зависит от вида функции, что и будет рассматриваться на следующем занятии.