Министерство образования Ставропольского края
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«МИНЕРАЛОВОДСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА»

Тема: Свойства логарифмов, переход к новому основанию, решение более сложных задач

Познакомимся с важнейшим свойством логарифмов, которое называется свойством перевода логарифма к новому основанию. Из этого свойства мы выведем несколько следствий. Также мы рассмотрим примеры, при решении которых используются формула перехода к новому основанию и следствия из нее.

Формула перехода к новому основанию

Теорема

Если a, b, c – положительные числа, причем a и c отличны от 1, то имеет место равенство:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ – формула перехода к новому основанию.

Доказательство

Преобразуем данное равенство, домножив левую и правую часть на знаменатель правой части:

$$\log_a b = \left.\frac{\log_c b}{\log_c a}\right| \cdot \log_c a$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \cdot \log_c a$$

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

Далее возведем c в степень левой и правой части:

$$c^{\log_c a \cdot \log_a b} = c^{\log_c b}$$

Преобразуем левую часть, применив свойство степеней:

$$\left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = c^{\log_c b}$$

Согласно основному логарифмическому тождеству:

$$c^{\log_c b} = b$$

Таким образом:

$$\left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = b$$

Согласно основному логарифмическому тождеству:

$$c^{\log_c a} = a$$

Следовательно:

$$a^{\log_a b} = b$$

Мы получили равенство, которое верно по основному логарифмическому тождеству. То есть:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Что и требовалось доказать.

Следствия из формулы перехода к новому основанию

1. Первое следствие мы вывели попутно, доказывая формулу перехода:

$$\boldsymbol{\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b}$$

2. Подставим в предыдущую формулу $c = b$:

$$\log_b a \cdot \log_a b = \log_b b$$

$$\boldsymbol{\log_b a \cdot \log_a b = 1}$$

$$\boldsymbol{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$$

Доказательство

Докажем третье следствие из формулы перехода к новому основанию

$$\boldsymbol{a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}},$$

при a, b > 0; a, b ≠ 1.

Доказательство

Прологарифмируем данное равенство по основанию a:

$$\log_a a^{\sqrt{\log_a b}} = \log_a b^{\sqrt{\log_b a}}$$

В правой и левой части вынесем степень за знак логарифма:

$$\sqrt{\log_a b} \cdot \log_a a = \sqrt{\log_b a} \cdot \log_a b$$

Так как $\log_a a = 1$, то:

$$\sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a} \cdot \log_a b$$

Согласно второму следствию из формулы перехода к новому основанию

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$

следовательно:

$$\sqrt{\log_a b} = \frac{1}{\sqrt{\log_a b}} \cdot \log_a b$$

Домножим левую и правую часть на знаменатель правой части:

$$\sqrt{\log_a b} = \frac{1}{\sqrt{\log_a b}} \cdot \log_a b \Big| \cdot \sqrt{\log_a b}$$

$$\log_a b = \log_a b$$

Равенство верное, следовательно:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$$

Что и требовалось доказать.

Пример 1

Вычислите:

$$\frac{\log_5 12 - \log_5 4}{\log_5 18 + \log_5 0{,}5} - \frac{\lg 64 + \lg 0{,}5}{\lg 7 - \lg 14}$$

Решение

Разность логарифмов с одинаковым основанием – это логарифм частного, а сумма логарифмов с одинаковым основанием – логарифм произведения. А у нас в числителях и знаменателях стоят логарифмы с одинаковыми основаниями.

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$$

Применяя эти свойства, получаем:

$$\frac{\log_5 12 - \log_5 4}{\log_5 18 + \log_5 0{,}5} - \frac{\lg 64 + \lg 0{,}5}{\lg 7 - \lg 14} = \frac{\log_5 \frac{12}{4}}{\log_5 (18 \cdot 0{,}5)} - \frac{\lg (64 \cdot 0{,}5)}{\lg \frac{7}{14}} = \frac{\log_5 3}{\log_5 9} - \frac{\lg 32}{\lg 0{,}5}$$

Согласно формуле перехода к новому основанию

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$:

$$\frac{\log_5 3}{\log_5 9} = \log_9 3$$

$$\frac{\lg 32}{\lg 0{,}5} = \log_{0{,}5} 32$$

Следовательно:

$$\frac{\log_5 3}{\log_5 9} - \frac{\lg 32}{\lg 0{,}5} = \log_9 3 - \log_{0{,}5} 32$$

Из основания логарифма показатель степени n выносится за знак логарифма как $\frac{1}{n}$, а из подлогарифмического выражения – как n, то есть:

$$\log_9 3 = \log_{3^2} 3 = \frac{1}{2} \log_3 3$$

$$\log_{0{,}5} 32 = \log_{2^{-1}} 2^5 = (-1) \cdot \log_2 2^5 = (-5) \cdot \log_2 2$$

Следовательно:

$\log_9 3 - \log_{0,5} 32 = \frac{1}{2}\log_3 3 - (-5)\cdot\log_2 2 = \frac{1}{2} + 5 = 5\frac{1}{2}$

Ответ: $5\frac{1}{2}$.

Пример 2

Вычислите:

$9^{\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8}$

Решение

Нам известно следствие из формулы перехода к новому основанию:

$\log_c a\cdot\log_a b = \log_c b$

С помощью этой формулы преобразуем показатель степени в данном выражении:

$\log_4 5\cdot\log_5 6 = \log_4 6$

$\log_4 6\cdot\log_6 7 = \log_4 7$

$\log_4 7\cdot\log_7 8 = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\log_2 2 = \frac{3}{2}$

Таким образом:

$9^{\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8} = 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$

Ответ: 27.

Пример 3

Вычислите:

$12^{\log_3 5\cdot\log_4 5\cdot(\log_3 5+\log_4 5)^{-1}}$

Решение

Преобразуем показатель степени, избавившись от минус первой степени:

$\log_3 5\cdot\log_4 5\cdot(\log_3 5+\log_4 5)^{-1} = \frac{\log_3 5\cdot\log_4 5}{\log_3 5+\log_4 5}$

Приведем всё к одному основанию (в данном случае к 5), воспользовавшись следствием из формулы перехода к новому основанию

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

$\frac{\log_3 5\cdot\log_4 5}{\log_3 5+\log_4 5} = \frac{\frac{1}{\log_5 3}\cdot\frac{1}{\log_5 4}}{\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_5 4}}$

Домножим числитель и знаменатель на $(\log_5 3\cdot\log_5 4)$:

$\frac{\frac{1}{\log_5 3}\cdot\frac{1}{\log_5 4}}{\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_5 4}} = \left(\frac{\log_5 3\cdot\log_5 4}{\log_5 3\cdot\log_5 4}\right):\left(\frac{\log_5 3\cdot\log_5 4}{\log_5 3}+\frac{\log_5 3\cdot\log_5 4}{\log_5 4}\right) =$

$$= 1 : \left(\frac{1 \cdot \log_5 4}{1} + \frac{\log_5 3 \cdot 1}{1}\right) = \frac{1}{\log_5 4 + \log_5 3} = \frac{1}{\log_5(4 \cdot 3)} = \frac{1}{\log_5 12} = \log_{12} 5$$

Следовательно:

$$12^{\log_3 5 \cdot \log_4 5 \cdot (\log_3 5 + \log_4 5)^{-1}} = 12^{\log_{12} 5}$$

Применим основное логарифмическое тождество:

$$12^{\log_{12} 5} = 5$$

Ответ: 5.

Пример 4

Известно, что $log_a b = 2;\ a, b > 0; a \neq 1$.

Вычислить: $log_{ab} b + log_{\sqrt{ab}} \sqrt[3]{b}$

Решение

Существует два способа решения этой задачи.

1. Перейдем в логарифмах (в выражении, которое нам необходимо вычислить) к одному основанию – a. Для этого воспользуемся формулой перехода к новому основанию:

а) $\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} = \frac{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}}{\log_a ab} = \frac{\log_a \sqrt{b} - \log_a a}{\log_a a + \log_a b}$

Так как:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \sqrt{b} = \log_a b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a b$$

$\log_a b = 2$ – по условию, то:

$$\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} = \frac{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}}{\log_a ab} = \frac{\log_a \sqrt{b} - \log_a a}{\log_a a + \log_a b} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 - 1}{1 + 2} = \frac{1 - 1}{3} = 0$$

б) $\log_{\sqrt{ab}} \sqrt[3]{b} = \frac{\log_a \sqrt[3]{b}}{\log_a \sqrt{ab}} = \frac{\frac{1}{3} \log_a b}{\frac{1}{2} \log_a ab} = \frac{\frac{1}{3} \log_a b}{\frac{1}{2} (\log_a a + \log_a b)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2}{\frac{1}{2}(1 + 2)} = \frac{2}{3} : \frac{3}{2} = \frac{4}{9}$

в) Таким образом: $\log_{ab} \frac{\sqrt{b}}{a} + \log_{\sqrt{ab}} \sqrt[3]{b} = 0 + \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$

2. Второе решение состоит в том, что если $log_a b = 2$, то $b = a^2$. Подставив это в наше выражение, мы получим выражение с одной переменной a, вычислить его будет несложно, главное не запутаться в степенях.

Ответ: $\frac{4}{9}$.

Пример 5

Дано: $\log_{12} 27 = a$.

Найти: $\log_6 16$

Решение

Заметим, что все числа в условии – это комбинации двоек и троек:

$$16 = 2^4;\ 27 = 3^3;\ 12 = 3 \cdot 2^2;\ \ 6 = 2 \cdot 3.$$

Перейдем в данных логарифмах к основанию 2 или 3. Например, к трем:

1.

$$\log_{12} 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 12} = \frac{3}{\log_3(3 \cdot 4)} = \frac{3}{\log_3 3 + \log_3 4} = \frac{3}{1 + \log_3 2^2} = \frac{3}{1 + 2\log_3 2}$$

Таким образом:

$$\frac{3}{1 + 2\log_3 2} = a$$

Выразим из этого выражения $\log_3 2$:

$$\frac{1 + 2\log_3 2}{3} = \frac{1}{a}$$

Домножаем это выражение на 3:

$$\frac{1 + 2\log_3 2}{3} = \frac{1}{a}\bigg| \cdot$$

$$1 + 2\log_3 2 = \frac{3}{a}$$

Вычтем из левой и правой части выражения 1 и разделим эти части на 2:

$$2\log_3 2 = \frac{3}{a} - 1$$

$$\log_3 2 = \frac{3 - a}{2a}$$

2.

$$\log_6 16 = \frac{\log_3 16}{\log_3 6} = \frac{\log_3 2^4}{\log_3(2 \cdot 3)} = \frac{4\log_3 2}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{4\log_3 2}{\log_3 2 + 1}$$

3. Так как

$$\log_3 2 = \frac{3 - a}{2a},$$

то:

$$\frac{4\log_3 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{4 \cdot \frac{3 - a}{2a}}{\frac{3 - a}{2a} + 1}$$

Домножим числитель и знаменатель на $2a$:

$$\frac{4\log_3 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{4 \cdot \frac{3 - a}{2a}}{\frac{3 - a}{2a} + 1} = \frac{12 - 4a}{3 - a + 2a} = \frac{12 - 4a}{3 + a}$$

Ответ: $\frac{12 - 4a}{3 + a}$.

Пример

Упростите выражение:

$2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$

Решение

Согласно основному логарифмическому тождеству представим 2 в виде:

$2 = 5^{\log_5 2}$

Тогда:

$2^{\log_3 5} = (5^{\log_5 2})^{\log_3 5} = 5^{\log_3 5 \cdot \log_5 2} = 5^{\log_3 2}$

Следовательно:

$2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2} = 5^{\log_3 2} - 5^{\log_3 2} = 0$

В данном примере мы попутно доказали полезное свойство:

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Ответ: 0.

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Выполнить действия

1. $lg8 + lg125$
2. $log_2 96 - log_2 12$
3. $\frac{1}{5}^{log_{\frac{1}{5}} 3+3}$
4. $log_{16} 1$
5. $2a^{\frac{1}{2}} + \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2$
6. $4n^{0,2} \cdot 2n^{-1,2}$
7. $log_6 2 + log_6 3$
8. $log_2 11 - log_2 44$
9. $\frac{1}{4}^{log_{\frac{1}{4}} 2-3}$
10. $log_5 5$
11. $2a^{\frac{1}{3}} - \left(a^{\frac{1}{9}}\right)^3$
12. $12n^{1,7} \cdot (-0,5)n^{-3,7}$
13. $log_{12} 4 + log_{12} 36$
14. $log_3(5/3) - log_3 15$
15. $4^{log_4 6-2}$
16. $lg10$
17. $5a^{\frac{2}{3}} - \left(2a^{\frac{1}{3}}\right)^2$
18. $5n^{3,5} \cdot 3n^{-0,5}$
19. $log_6 8 + log_6 27$

20. $log_3 72 - log_3 8$
21. $0{,}5^{log_{0,5}4-2}$
22. $log_7 1$
23. $2a^{\frac{3}{5}} - 3\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^3$
24. $7{,}5n^{4,5} \cdot 2n^{-2,5}$

Задание 2. Используя определения и свойства, найти Х

25. $\log_3 x = -1$
26. $\log_6 x = 3 \cdot \log_6 2 + 0{,}5 \cdot \log_6 25 - 2 \cdot \log_6 3$
27. $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$
28. $\lg x = 5 \cdot \lg 2 + 2 \cdot \lg 3 - \frac{1}{2} \cdot \lg 4$
29. $\log_x 81 = 4$
30. $\lg x = \frac{1}{2} \cdot \lg 25 - 3 \cdot \lg 3 + 4 \cdot \lg 2$
31. $\log_x 27 = 3$
32. $\log_4 x = \frac{1}{3} \cdot \log_4 216 - 2 \cdot \log_4 10 + 4 \cdot \log_4 3$
33. $\log_5 x = 2$
34. $\log_6 x = 3 \cdot \log_6 2 + 0{,}5 \cdot \log_6 25 - 2 \cdot \log_6 3$
35. $\log_7 x = -2$
36. $\lg x = 5 \cdot \lg 2 + 2 \cdot \lg 3 - \frac{1}{2} \cdot \lg 4$

Критерии оценки:

На оценку «3» - выполнить конспект теоретической части темы;

На оценку «4» - выполнить конспект теоретической части темы, выполнить не менее 20 заданий для самостоятельного решения;

На оценку «5» - выполнить конспект теоретической части темы, выполнить все задания для самостоятельного решения.