



Министерство образования Ставропольского края
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«МИНЕРАЛОВОДСКИЙ КОЛЛЕДЖ
ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА»

Тема: Решение задач на применение аксиом и их следствий (в пирамиде)

На этом занятии мы решим несколько задач с помощью трех аксиом и двух теорем-следствий в пирамиде.

В начале занятия мы повторим аксиомы, вспомним, что такое треугольная пирамида, и повторим теоремы-следствия из аксиом. Далее мы решим несколько задач на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в треугольной пирамиде, опираясь на повторенный теоретический материал.

Напоминание аксиом стереометрии

Аксиома 1 (A1)

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Иллюстрация аксиомы A1.

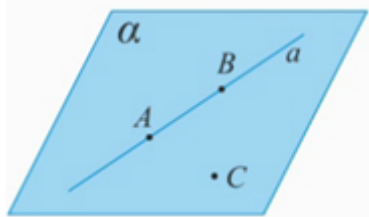


Рис. 1.

Рассмотрим три точки: A , B , C , точка C не принадлежит прямой AB : $C \notin AB$ (Рис. 1.). Тогда через три точки A , B , C , не лежащие на одной прямой, проходит плоскость α , и притом только одна. Плоскость α можно также обозначить через три точки ABC .

Аксиома 2 (A2)

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

Иллюстрация аксиомы A2.

Рассмотрим плоскость α , точки A , B прямой a принадлежат плоскости α (Рис. 2.).

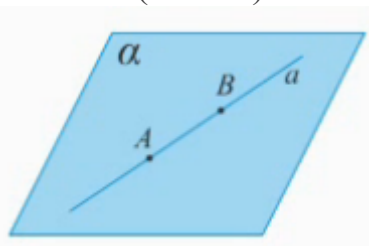


Рис. 2.

Аксиома утверждает – все точки прямой a (прямой AB) принадлежат плоскости α , т.е. вся прямая лежит в плоскости α или плоскость α проходит через прямую a .

$$\begin{cases} A \in a \\ B \in a \end{cases} \rightarrow AB \in \alpha.$$

Аксиома 3 (А3).

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей (плоскости пересекаются по прямой).

Иллюстрация аксиомы А3.

Имеем разные плоскости: плоскость α , плоскость β . Известно, что они имеют общую точку M , точка M принадлежит плоскости α и плоскости β . (Рис. 3.)

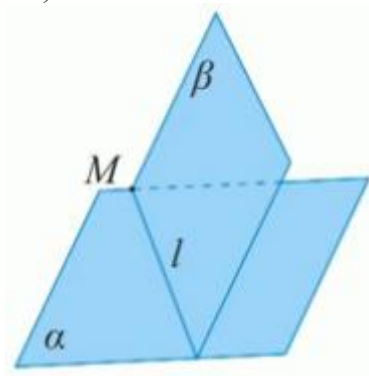


Рис. 3.

Третья аксиома утверждает, что они имеют прямую, на которой лежат все их общие точки. Прямую мы обозначили за l , т.е. плоскости α и β пересекаются по прямой l , проходящей через точку M .

$$\begin{cases} M \in \alpha \\ M \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = l \\ \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Напоминание теорем, которые следуют из аксиом стереометрии

Из этих аксиом вытекают две важные теоремы.

Теорема 1

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Иллюстрация теоремы 1.

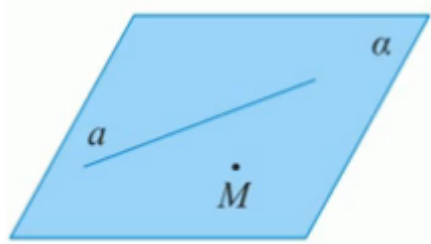


Рис. 4.

Даны прямая a и точка M , не лежащая на данной прямой (Рис. 4.). Теорема утверждает, что существует такая единственная плоскость α , которая проходит и через прямую a , и через точку M , и что эта плоскость α – единственная. Это можно записать таким образом:

$$M \notin a \Rightarrow \begin{cases} a \in \alpha \\ M \in \alpha \end{cases}, \alpha \text{ единственная}$$

Теорема 2

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Иллюстрация теоремы 2.

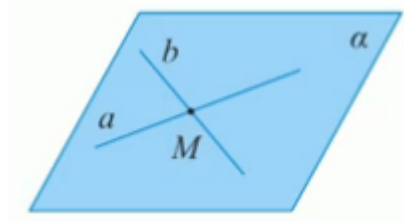


Рис. 5.

Даны прямые a и b , они пересекаются, т.е. имеют единственную общую точку M (Рис. 5.). Теорема утверждает, что существует единственная плоскость α – такая, которая проходит и через прямую a , и через прямую b , что можно записать таким образом:

$$a \cap b = M \Rightarrow \text{пл. } \alpha \begin{cases} a \in \alpha \\ b \in \alpha \end{cases}, \text{пл. } \alpha \text{ – единственная.}$$

Решение задачи 1

Дана треугольная пирамида $ABCD$ (Рис. 6.). Найти, по какой прямой пересекаются: а) плоскости ABD и ACK

б) плоскости ADC и MBC

в) плоскости BDK и ADC

г) плоскости MDN и ABD

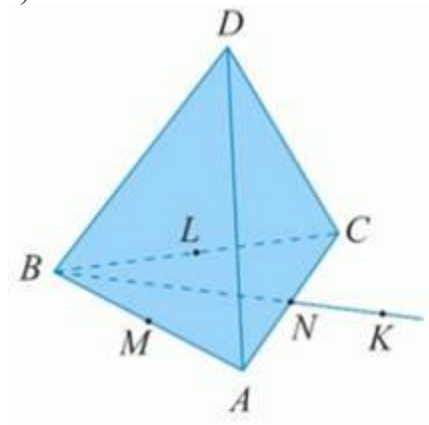


Рис. 6.

а) В этом пункте речь идет о двух плоскостях ABD и ACK . Что такое, плоскость ABD – понятно, это плоскость грани. А что такое плоскость ACK ? Здесь надо понять, что это плоскость ABC , только по-другому названная, так как точка K лежит на прямой BN . Ее пересекает прямая AC , а через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Вот названия этой одной и той же плоскости: ABC , AMC , ALC , ACK . Итак, в этом пункте на самом деле речь идет о пересечении плоскостей ABD и ABC . Эти плоскости пересекаются по прямой AB , потому что и точка A , и точка B принадлежат двум плоскостям - ABD и ABC .

Ответ: AB .

Напоминание: Для названия плоскости нужно иметь только три точки, которые не лежат на одной прямой.

б) Найти, по какой прямой пересекаются плоскости ADC и MBC .

Плоскость ADC – это боковая грань пирамиды ADC . Рассмотрим, что собой представляет плоскость MBC . Три точки: и M , и B , и C – лежат в плоскости нижнего основания ABC . Так что плоскость MBC – это плоскость ABC . Значит, линией пересечения является прямая AC , потому что и точка A , и точка C лежат одновременно в двух плоскостях ABC и ADC .

Ответ: AC .

в) Плоскость BDK совпадает с плоскостью BDN . И в плоскости BDN и в плоскости ADC содержатся и точка D , и точка N . Значит, линия пересечения двух плоскостей – прямая DN .

Ответ: DN

г) Обе плоскости MDN и ABD содержат и точку M и точку D . Значит, их линия пересечения – прямая DM .

Ответ: DM .

Предыдущая серия задач на треугольную пирамиду касалась пересечения различных двух плоскостей. Следующие задачи будут посвящены пересечению трех плоскостей.

Решение задачи 2

Дана треугольная пирамида $ABCD$ (Рис. 6.). Назовите три разные плоскости, которым принадлежат:

а) точка A

б) точка B

в) точка N

Ответ:

а) ABD , ACD , ABC .

б) BAC , BAD , BCD .

в) NBD , ABC , NMD .

а) Точка A принадлежит следующим трем различным плоскостям: ABD – первая плоскость, ACD – вторая плоскость и ABC – третья плоскость.

Пояснение: означенные три плоскости попарно пересекаются. Пересечение двух плоскостей есть прямая линия, пересечение вторых двух плоскостей – прямая линия. Значит, пересечение всех трех плоскостей – это точка A .

б) Аналогично точка B принадлежит следующим плоскостям: BAC – нижней грани, BAD – одной боковой грани и BCD – второй боковой грани. Это вершина пирамиды. Здесь три плоскости очевидны.

в) Точка N – это внутренняя точка отрезка AC . Каким трем различным плоскостям принадлежит точка N ?

Первая плоскость – NBD , вторая плоскость – ABC и третья плоскость – NMD . Вот три различные плоскости, которые пересекаются в точке N .

Решение задачи 3

Дана треугольная пирамида $ABCD$ (Рис. 6). Через середины N , M , L сторон треугольника ABC проведена плоскость.

Совпадает ли она с плоскостью треугольника?

Решение:

Рассмотрим плоскость ABC . Точка M принадлежит этой плоскости, потому что этой плоскости принадлежит вся прямая AB , на которой лежит точка M . Аналогично заключаем, что точка N принадлежит плоскости треугольника и точка L принадлежит плоскости треугольника. Через три точки M , L и N можно провести единственную плоскость. Через три точки A , B , C тоже можно провести единственную плоскость. И эта плоскость одна и та же.

Ответ: совпадает.

Решение задачи 4

Дана треугольная пирамида $ABCD$ (Рис. 7.).

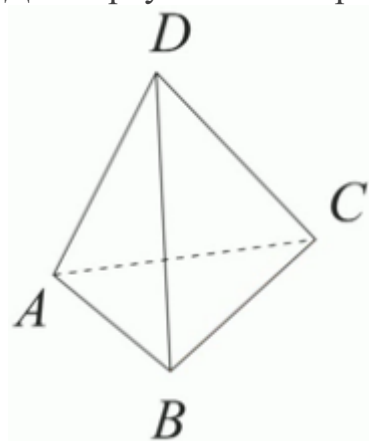


Рис. 7.

Каково взаимное расположение плоскостей, проходящих через прямые:

- а) AB и BC , CD и BC ;
- б) AB и BC , AD и CD ?

Решение:

а) По теореме 2, через две пересекающиеся прямые AB и BC , проходит плоскость, и притом только одна. Это плоскость ABC . Через вторые две пересекающиеся прямые CD и BC также по теореме 2 проходит плоскость, и притом только одна. Это плоскость BCD . Они пересекаются по прямой BC .

Ответ: плоскости пересекаются по прямой BC .

б) AB и BC , две прямые, которые пересекаются в точке B . Через них проходит единственная плоскость, плоскость ABC .

AD и CD – две прямые, которые пересекаются в точке D , значит, через них, через прямые AD и CD проходит единственная плоскость ADC . Эти плоскости пересекаются по прямой AC , так как точка A принадлежит обеим плоскостям и точка C принадлежит обеим плоскостям.

Ответ: плоскости пересекаются по прямой AC .

Итоги

Итак, стереометрия помогла нам в решении задач в треугольной пирамиде.

Далее мы применим те же знания для решения задач в параллелепипеде.

Список рекомендованной литературы

1. Геометрия. 10-11 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 5-е издание, исправленное и дополненное – М. : Мнемозина, 2008. – 288 с. : ил.

2. Геометрия. 10-11 класс: Учебник для общеобразовательных учебных заведений / Шарыгин И. Ф. – М.: Дрофа, 1999. – 208 с.: ил.

3. Геометрия. 10 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики /Е. В. Потоскуев, Л. И. Звалич. – 6-е издание, стереотип. – М. : Дрофа, 008. – 233 с. :ил.

Рекомендованное домашнее задание

1. Дана треугольная пирамида $ABCD$ (Рис. 6.). Найти, по какой прямой пересекаются:

- а) плоскости DLC и AMN
- б) плоскости BLM и ADC
- в) плоскости MDC и ADC

2. Дана треугольная пирамида $ABCD$ (Рис. 6.). Назовите три разные плоскости, которым принадлежат:

- а) точка M
- б) точка D
- в) точка C

3. Дана треугольная пирамида $ABCD$ (Рис. 8.). Каково взаимное расположение плоскостей, проходящих через прямые:

- а) BL и BD , AB и AC ;
- б) AL и AD , AB и BD ?

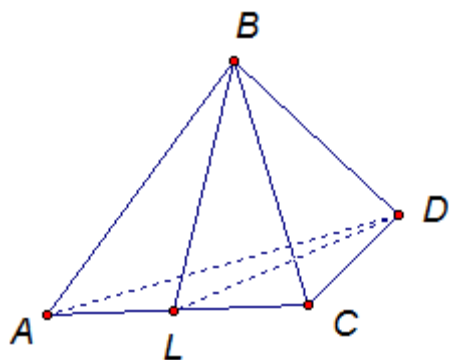


Рис. 8.

4. Геометрия. 10-11 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 5-е издание, исправленное и дополненное – М. : Мнемозина, 2008. – 288 с. : ил.

Задание 12, стр. 10.